ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1987

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES DURÉE: 3 HEURES

Toutes les variables aléatoires du problème sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; n et p désignent des entiers strictement positifs.

I

Soit X une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs entières 1, 2, ..., p, avec égale probabilité $\frac{1}{p}$.

On appelle $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi que X. On note S_n la somme $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

1. Calculer l'espérance et l'écart type des variables aléatoires X et S_n.

2. Calculer la fonction génératrice g de la variable aléatoire X.

3. a) Exprimer la fonction génératrice de S_n, notée g_n, au moyen de la fonction g. Préciser l'ensemble $S_n(\Omega)$ des valeurs prises par S_n.

   b) Développer en série entière de x la fonction $x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^n}$, en précisant l'intervalle de convergence. On écrira le coefficient de x^k dans le développement demandé sous la forme d'un coefficient du binôme.

   c) Donner le développement suivant la formule du binôme de $(1 - x^p)^n$.

   d) En faisant le produit des développements trouvés au b) et au c), donner une nouvelle expression de la fonction g_n.

4. a) Vérifier que la loi de S_n est donnée par la formule :

$$P(S_n = n+j) = \frac{1}{p^n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ 0 \leqslant k \leqslant \frac{j}{p}}} (-1)^k \, C_n^k \, C_{n-1+j-pk}^{n-1}$$

   b) Calculer la probabilité pour que la somme des points amenés par 4 jets indépendants d'un dé équilibré soit égale à 14.

5. a) On pose $h_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(S_n \leqslant k) x^k$.

   Que dire du rayon de convergence de cette série entière ? Exprimer h_n au moyen de g_n, puis sous forme de fraction rationnelle.

   b) En effectuant le produit de deux développements, trouver l'expression de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$ sous forme de somme.

6. a) Pour n fixé, chercher la limite, notée $\Phi_n(x)$, de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$ lorsque p et k tendent vers $+\infty$, le quotient $\frac{k}{p}$ tendant vers un nombre x fixé $x \in [0,n]$.

   b) Expliciter la fonction Φ_2 et sa dérivée notée φ_2.

II

Dans cette partie U_1, U_2, ... U_n sont n variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi uniforme sur le segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, c'est-à-dire admettant la même fonction de densité, constante sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et nulle en-dehors. On note V_n la somme $V_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ et f_n la fonction de densité, supposée continue pour $n \geqslant 2$, de la variable aléatoire V_n.

1. Calculer l'espérance $E(V_n)$ et la variance $\sigma^2(V_n)$.

2. a) Montrer que la fonction f_n est nulle en-dehors d'un intervalle à préciser.

   b) Expliquer pourquoi la fonction f_n est paire.

3. a) Pour $x \in [0,1]$, vérifier la formule $f_2(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_1(u) \, f_1(x-u) \, du$.

   b) En déduire le calcul de la fonction f_2. Tracer son graphe.

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE des INGENIEURS des TRAVAUX RURAUX
et des TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Opt. Bio. Math. – Math 1

4. a) Etablir la relation de récurrence : $f_n(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_{n-1}(u)\,du$, valable pour tout x réel.

b) Calculer la fonction f_3. Tracer son graphe. La fonction f_3 est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

c) Donner des valeurs approchées, à 10^{-3} près, des probabilités :

$P(|V_3| \leqslant \sigma(V_3))$; $P(|V_3| \leqslant 2\sigma(V_3))$; $P(|V_3| \leqslant 3\sigma(V_3))$.

Comparer ces valeurs aux résultats obtenus si on suppose que V_3 suit une loi normale centrée. Citer le théorème du cours permettant de connaître le comportement de la variable aléatoire V_n pour n assez grand.

5. a) Soient $U_1^*, U_2^*, \ldots, U_n^*$, n variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$ et V_n^* leur somme, $V_n^* = U_1^* + \ldots + U_n^*$.

Exprimer la densité f_n^* de V_n^* au moyen de f_n.

b) Calculer la fonction f_2^* et la comparer à la fonction φ_2 trouvée au I6b).